INSTITUT DE STATISTIQUE
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

CONCOURS D'ENTRÉE 2004

Épreuve de Mathématique I

3 heures

On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications continues de $[0,2]$ dans $\mathbb{R}$ et $\|\cdot\|_1$ la norme de la convergence en moyenne sur E, définie par :

$$\forall f \in E, \|f\|_1 = \int_0^2 |f(x)| \ dx$$

L'objet du problème est l'étude de courbes intégrales d'équations différentielles linéaires de la forme

$$(1-x)^p y' + a(x)y = 0$$

où p désigne un entier naturel strictement positif et a une fonction appartenant à E.

Partie 1

1) On note $\|\cdot\|_\infty$ la norme de la convergence uniforme sur E, définie par :

$$\forall f \in E, \|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \, ; x \in [0,2]\}$$

   a) Trouver la plus petite constante réelle c vérifiant

$$\forall f \in E, \|f\|_1 \leqslant c \, \|f\|_\infty$$

   b) Existe-t-il une constante réelle d vérifiant

$$\forall f \in E, \|f\|_\infty \leqslant d \, \|f\|_1 \, ?$$

   c) Montrer que l'ensemble des fonctions réelles continues sur $[0,2]$ et dérivables en tout point x de la réunion $[0,1[\,\cup\,]1,2]$ est une partie dense de l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|_1)$
   (on pourra utiliser le théorème de Weierstrass : toute fonction réelle continue sur un segment est, sur ce segment, limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales).

2) Pour tout entier naturel strictement positif n, on note g_n la fonction définie sur le segment $[0,2]$ par :

$$\forall x \in [0,2], g_n(x) = \sqrt[n]{|x^n - 1|}$$

   a) Montrer que, pour tout entier naturel strictement positif n, la fonction g_n est un élément de E. En quels points est-elle dérivable ?

   b) Montrer que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers une fonction g, que l'on précisera.

   c) La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur le segment $[0,2]$?

   d) La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur l'intervalle $[0,1[$?

3) a) Démontrer, à l'aide du théorème de convergence dominée, que la suite de terme général $\displaystyle\int_0^2 g_n(x) \ dx$ est convergente et de limite égale à $\dfrac{5}{2}$.

   b) Montrer que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite convergente de l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|_1)$.

   c) L'ensemble des fonctions de E qui s'annulent au point 1 est-il une partie fermée de l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|_1)$?

Partie 2

Dans cette partie, indépendante des deux autres, on étudie la vitesse de convergence de la suite des intégrales des fonctions g_n, sur $[0,1]$ et sur $[0,2]$.

1) a) Montrer que, pour tout entier n strictement positif, la fonction $x \mapsto \ln(1-x^n)$ est intégrable sur l'intervalle $[0,1[$.

b) Quelle est la limite de l'intégrale $J_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(1-x^n)\ dx$ lorsque n tend vers l'infini ?

c) Démontrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(1-x)}{x}$ est intégrable sur l'intervalle $]0,1[$ et justifier l'égalité :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\ dx = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

d) En admettant l'égalité $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, démontrer que, lorsque n tend vers l'infini, on a l'équivalence :

$$J_n \sim \frac{\pi^2}{6n}$$

2) a) Justifier, pour tout nombre réel négatif ou nul u, la double inégalité :

$$1 + u \leqslant e^u \leqslant 1 + u + \frac{u^2}{2}$$

b) Établir, pour tout entier strictement positif n, la double inégalité :

$$\frac{J_n}{n} \leqslant \int_0^1 g_n(x)\ dx - 1 \leqslant \frac{J_n}{n} + \frac{1}{2n^2}\int_0^1 (\ln(1-x))^2\ dx$$

c) Déduire des résultats précédents un équivalent simple de $1 - \displaystyle\int_0^1 g_n(x)\ dx$, lorsque n tend vers l'infini.

3) Démontrer que, lorsque n tend vers l'infini, on a :

$$\int_0^2 g_n(x)\ dx = \frac{5}{2} - \frac{\pi^2}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Partie 3

Dans cette partie, on considère un nombre entier p strictement positif et une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions appartenant à E, à valeurs strictement comprises entre 0 et 1.
Pour tout entier n strictement positif, on note f_n l'unique application dérivable de $[0,1[$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\begin{cases} f_n(0) = 1 \\ \forall x \in [0,1[\ , (1-x)^p f_n'(x) + a_n(x) f_n(x) = 0 \end{cases}$$

1) Dans cette question et la suivante, l'entier n est considéré comme fixé.

a) Donner une expression de $f_n(x)$ sous forme exponentielle.

b) Démontrer que la fonction f_n est décroissante sur $[0,1[$ et de limite nulle en 1.

c) Montrer qu'en prolongeant f_n par la valeur 0 en 1, on obtient une fonction de classe C^1 sur le segment $[0,1]$ si et seulement si l'entier p est au moins égal à 2.

d) Pour quelles valeurs de p l'équation différentielle $(1-x)^p y' + a_n(x) y = 0$ admet-elle une solution sur $[0,2]$ autre que la fonction nulle ?

2) a) Démontrer que la fonction $x \mapsto \sqrt{1 + f_n'(x)^2}$ est intégrable sur $[0,1[$ et établir l'inégalité :

$$\int_0^1 \sqrt{1 + f_n'(x)^2}\ dx \leqslant 2$$

b) Établir, pour tout élément x de $[0,1[$, l'inégalité

$$\int_x^1 \sqrt{1 + f_n'(t)^2}\ dt \geqslant \sqrt{(1-x)^2 + f_n(x)^2}$$

en en donner une interprétation géométrique.

3) On suppose dans cette question que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers 0 sur tout segment inclus dans l'intervalle $[0,1[$.

a) Montrer que, pour tout réel strictement positif ε, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1-\varepsilon} \sqrt{1+f_n'(x)^2}\,dx$ tend vers $1-\varepsilon$ quand n tend vers l'infini.

b) Utiliser les inégalités établies dans la question précédente pour prouver que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \sqrt{1+f_n'(x)^2}\,dx = 2$$

4) a) Trouver un entier q et une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de E tels que la fonction g_n, définie dans la première partie, soit, sur chacun des deux intervalles $[0,1[$ et $]1,2]$, solution de l'équation différentielle :

$$(1-x)^q y' + b_n(x)y = 0 \qquad (e_n)$$

b) Justifier, pour tout entier n strictement positif, l'existence et l'unicité d'un élément h_n de E vérifiant :

$$\begin{cases} h_n(0) = h_n(2) = 1 \\ \forall x \in [0,1[\cup]1,2]\,, (1-x^n)h_n'(x) + x^{n-1}h_n(x) = 0 \end{cases}$$

c) Trouver la limite des intégrales $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+h_n'(x)^2}\,dx$ et $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{1+h_n'(x)^2}\,dx$ quand n tend vers l'infini.